FGB-P2008-03

08학번 수학과 권혁준

2008년 5월 19일

Lemma 1 *p를 $C([0,1])$에 속하는 음수가 되지 않는 함수라 하자. 이 때 $y \in C^2(0,1) \cap C([0,1])$가 미분방정식*

$$y''(t) + p(t)y(t) = 0, \quad t \in (0,1), \quad y(0) = y(1) = 0$$

을 만족하는 해라고 하면, y는 $(-\infty, \infty)$에서 연속적인 이계도함수를 가지게 확장될 수 있다.[1]

Proof

y'은 y''의 도함수이므로 미적분학의 기본정리에 의하여, y'은 y''의 어떤 원시함수와 적분상수의 합으로 표시될 수 있다. 그러므로

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+} y'(t) &= \lim_{t\to 0^+}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{t} y''(t)dt + C\right) \\
&= \lim_{t\to 0^+}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{t} (-p(t)y(t))dt + C\right) \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{0} (-p(t)y(t))dt + C \quad (\because (-p(t)y(y)) \in C([0,1]))
\end{aligned}$$

따라서 y'은 $t = 0$에서 우극한값을 가진다. 마찬가지로

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 1^-} y'(t) &= \lim_{t\to 1^-}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{t} y''(t)dt + C\right) \\
&= \lim_{t\to 1^-}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{t} (-p(t)y(t))dt + C\right) \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1} (-p(t)y(t))dt + C \quad (\because (-p(t)y(y)) \in C([0,1]))
\end{aligned}$$

[1] 중요하지 않을수도 있지만 이 Lemma는 오목함수와 접선의 성질을 t가 0이나 1인 지점에서 사용하기 위하여 필요하다.

이므로 y'는 $t=1$에서 좌극한값을 가진다. 또한

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+} y''(t) &= \lim_{t\to 0^+}(-p(t)y(t)) \\ &= -p(0)y(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

이고,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 1^-} y''(t) &= \lim_{t\to 1^-}(-p(t)y(t)) \\ &= -p(1)y(1) \\ &= 0\end{aligned}$$

이므로 y''은 $t=0$, $t=1$에서 각각 0인 우극한값, 좌극한값을 가진다. 따라서

$$y_e(t) = \begin{cases} \left(\lim_{t\to 0^+} y'(t)\right)t & \text{if } x < 0 \\ y(t) & \text{if } 0 \le x \le 1 \\ \left(\lim_{t\to 1^-} y'(t)\right)(t-1) & \text{if } 1 < x \end{cases}$$

라고하면, y_e는 $[0,1]$에서 y와 같으면서, $C^2(-\infty,\infty)$에 속한다.[2]

Lemma 2 *음이 아니며, $[0,1]$에서 연속인함수 p에 대해 미분방정식*

$$y''(t)+p(t)y(t)=0, \quad t\in(0,1), \quad y(0)=y(1)=0$$

이 $C^2(0,1)\cap C([0,1])$에 속하는 non-zero solution y를 가진다고 하자. 이 때 $y(a)=y(b)=0$이면$(a<b)$, 미분방정식

$$y''(t)+(b-a)^2p((b-a)t+a)y(t)=0, \quad t\in(0,1), \quad y(0)=y(1)=0$$

도 $C^2(0,1)\cap C([0,1])$에 속하는 non-zero solution을 가진다. 더 나아가서 $y((b-a)t+a)$가 해가 된다.

Proof

$$y_0 = y((b-a)t+a)$$

[2] 평균값 정리에 의해 도함수의 극한값이 존재하면 그 값이 도함수의 값이 됨을 알 수 있다. 또한 값은 방법이 이계도함수에서도 적용된다.

라 하자. 그러면

$$y_0'' = (b-a)^2 y''((b-a)t+a)$$

이다. 이제 y_0를 준 미분방정식에 대입해보면

$$\begin{aligned} y_0''(t) + (b-a)^2 p((b-a)t+a) y_0(t)'' &= 0 \\ (b-a)^2 y''((b-a)t-a) + (b-a)^2 p((b-a)t+a) y((b-a)t-a) &= 0 \\ y''((b-a)t-a) + p((b-a)t+a) y((b-a)t-a) &= 0 \end{aligned}$$

이므로 y_0는 이 미분방정식을 만족하며, $y_0(0) = y(a) = 0$, $y_0(1) = y(b) = 0$이다.

여기서 $t \in [0,1]$에 대해 y_0가 항등적으로 0이라고 하면, $t \in [a,b]$에서 y가 항등적으로 0이다. 따라서 $y((a+b)/2) = 0 \wedge y'((a+b)/2) = 0$이게 되어 uniqueness and existence theorem에 의해서 y또한 $t \in [a,b]$에서 항등적으로 0이되어서 모순이 생긴다. 따라서 y_0는 non-zero solution이다.

Problem 1 *$C([0,1])$의 원소인 음이아닌 함수 p가 $C^2(0,1) \cap C([0,1])$의 원소인 non-zero solution을 다음 미분방정식에서 가진다고 하자.*

$$y''(t) + p(t)y(t) = 0, \quad t \in (0,1), \quad y(0) = y(1) = 0$$

그러면 이 함수는 다음을 만족한다.

$$\int_0^1 p(t)dt > 4$$

Proof

준 미분방정식의 주어진 조건을 만족하는 한 해 y_p를 잡자. 그러면 y_p는 non-zero solution이므로 우리는 $y_p(c) \neq 0$인 c를 잡을 수 있다. 이제 다음과 같은 집합을 생각하자.

$$S = \{t \mid (\forall x \in [c,t])(y_p(x) \neq 0)\}^3$$

여기서 $y_p(c) \neq 0$이고, $y_p(0) = y(1) = 0$이므로 S는 공집합이 아니며, 0과 1에 의해서 유계되어있다. 그러므로 완비성정리에 의해서 S는 최대상계 a와 최소하계 b를 가지게 되는데 여기서 y가 연속함수이므로 $y_p(a) = y_p(b) = 0$이다. 그러므로 **Lemma** 2에 의해서 $p_0(t) = (b-a)^2 p((b-a)t+b)$라 하면 $y_p((b-a)t+a)$가

$$y''(t) + p_0(t)y(t) = 0, \quad t \in (0,1), \quad y(0) = y(1) = 0$$

[3] 직관적인 관점에서 설명을 하자면, c를 기준으로 왼쪽, 오른쪽에서 가장 먼저 y_p의 값을 0으로 만드는 두 값을 끝점으로하는 개구간이다.

의 해가 된다. 여기서 $y_p(c) > 0$이면, $y_0 = y_p((b-a)t+a)$, $y_p(c) < 0$이면, $y_0 = -y_p((b-a)t+a)$라 하면 y_0는 위의 미분방정식의 해가 된다. 또한

$$\begin{aligned}\int_0^1 p(t)dt &\geq \int_a^b p(t)dt \\ &= \int_0^1 (b-a)p((b-a)t+b)dt \\ &\geq \int_0^1 p_0(t)dt\end{aligned}$$

이다.

여기서 우리는 **Lemma** 1에 의해서 y_0를 $C^2(-\infty,\infty)$에 속하게 확장할 수 있다. 이 때 $y_0(t)$는 $[0,1]$에서 음수가 아니므로 우리는

$$y_0''(t) + p_0(t)y_0(t) = 0$$

에서 $y_0''(t)$가 양수가 아니라는 것을 알 수 있다. 따라서 y_0는 아래로 오목인 함수이다.

y_0는 $[0,1]$에서 연속이므로 우리는 최대값, 최소값 정리에 의해서 $[0,1]$에서 최대가 y_0를 최대로 만드는 M을 찾을 수 있다. 그러면

$$\begin{aligned}\int_0^1 p_0(t)dt &\geq \int_0^1 p_0(t)\frac{y_0(t)}{y_0(M)}dt \\ &= \int_0^1 -\frac{y_0''(t)}{y_0(M)}dt \\ &= \frac{y_0'(0)-y_0'(1)}{y_0(M)}\end{aligned}$$

이다. 또한 y_0은 [0,1]에서 아래로 오목인 함수이므로 $t=0$에서 그은 접선에서 $t=M$일 때의 값은 $y_0(M)$이상이다. 그러므로 $y_0'(0)M \geq y_0(M)$이다. 마찬가지로 $t=1$에서 그은 접선에서 $t=M$일 때의 값은 $y_0(M)$이상이다. 그러므로 $-y_1'(0)(1-M) \geq y_0(M)$이다. 따라서 다음 식이 성립한다. [4]

$$\begin{aligned}\frac{y_0'(0)-y_0'(1)}{y(M)} &\geq \frac{1}{M}+\frac{1}{1-M} \\ &\geq 4\end{aligned}$$

그러므로 다음과 같은 부등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\int_0^1 p(t)dt \geq 4$$

[4] $y_0'(0)$, $y_0'(1)$은 각각 양수, 음수이므로 M이 0이나 1이 아님을 알 수 있다.

여기서 이 부등식의 등호가 성립하려면

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{1-M} = 4$$

이어야 하므로 $M = \frac{1}{2}$여야하고,

$$y_0'(0)M = y_0(M) \ \wedge \ -y_1'(0)(1-M) = y_0(M)$$

이므로[5] 결국 y_0는

$$y_0(t) = \begin{cases} kt & \text{if } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ k(1-t) & \text{if } \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

꼴이 되어서 $t = \frac{1}{2}$에서 미분이 불가능 해져서 모순이 생긴다. 따라서 등호는 성립하지 않는다. 그러므로

$$\int_0^1 p(t)dt > 4$$

이 성립한다.

Corollary 3 *음이 아니며,* $[0,1]$*에서 연속인함수* p*에 대해 미분방정식*

$$y''(t) + p(t)y(t) = 0, \quad t \in (0,1), \quad y(0) = y(1) = 0$$

이 $C^2(0,1) \cap C([0,1])$*에 속하는 non-zero solution* y*를 가진다고 하자. 이 때* $y(c) = 0$*이면(단,* $0 < c < 1$*),*

$$\int_0^1 p(t)dy > 8$$

이다.

proof

Lemma 2에 의해서 $c^2p(ct)$, $(1-c)^2p((1-c)t+c)$도, 미분방정식

$$y''(t) + p(t)y(t) = 0, \quad t \in (0,1), \quad y(0) = y(1) = 0$$

이 non-zero solution을 갖게하는 $p(t)$이다. 따라서

$$\int_0^1 p(t)dt \quad = \quad \int_0^c p(t)dt + \int_c^1 p(t)dt$$

[5] $(M, y_0(M))$이 t가 0인 지점에서 그은 y_0의 접선에 있으려면 y_0가 아래로 오목이므로 결국 $t \in [0, \frac{1}{2})$에서 $y'(t)$의 값이 일정해야한다. 마찬가지로 $(M, y_0(M))$이 t가 1인 지점에서 그은 y_0의 접선에 있으려면 y_0가 아래로 오목이므로 결국 $t \in (\frac{1}{2}, 1]$에서 $y'(t)$의 값이 일정해야한다.

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 cp(ct)dt + \int_0^1 (1-c)p((1-c)t)dt \\
&\geq \int_0^1 c^2 p(ct)dt + \int_0^1 (1-c)^2 p((1-c)t)dt \\
&> 8 \quad (\text{By } \textbf{Problem } 1)
\end{aligned}
$$

Problem 2 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$를 $C([0,1])$에 속한 *non-negative function*들의 *family*라고 하자. 이 때 모든 n에 대해 미분방정식

$$y''(t) + p_n(t)y(t) = 0, \quad t \in (0,1), \quad y(0) = y(1) = 0$$

이 $C^2(0,1) \cap C([0,1])$에 속하는 *non-zero solution*을 가진다고 하자. 여기서

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 p_n(t)dt = 4$$

라 하면, 임의의 $C([0,1])$에 속하는 φ에 대해

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 p_n(t)\varphi(t)dt = 4\varphi(\frac{1}{2})$$

이다.

proof

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 p_n(t)dt \right) = 4$$

이므로, $n > N_1$이면

$$\left| \int_0^1 p_n(t)dt - 4 \right| < 2$$

이게하는 N_1을 잡을 수 있다. 그러면 **Corollary** 3에 의해서 $n > N_1$이면 준 미분방정식의 임의의 해 $y(t)$가 0이되게 하는 $t \in [0,1]$은 0과 1뿐이다. 따라서 준 미분방적식의 non-zero인 해는 0, 1을 제외한 모든 점이 부호가 같고, $y(t)$가 준 미분방정식의 해이면, $-y(t)$도 해이므로, 결국 우리는 미분방정식의 non-negative and non-zero solution 을 찾을 수 있다. 또한 이러한 y에 대해서 주어진 미분방정식에 의해 y''은 0이하이므로 이 함수는 아래로 오목한 함수가 된다. 앞으로 p_n에 대해서 이 조건을 만족하는 y를 **Lemma** 1를 사용하여 $(-\infty, \infty)$로 확장한 함수를 각각의 N_1보다 큰 n에 대해서 하나씩 뽑아서 y_n이라고 할 것이고, $y_n(t)$를 $[0,1]$에서 최대로 하게하는 t를 M_n이라고 할 것이다. 이제 $n > N_1$일 때 **Problem** 1와 같은 방법으로

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 p_n(t)dt &\geq \frac{1}{M_n} + \frac{1}{1-M_n} \\
&\geq 4
\end{aligned}
$$

이므로 결국,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{M_n}+\frac{1}{1-M_n}\right)=4$$

이다. 따라서 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{M_n}+\frac{1}{1-M_n}\right) &= 4\\
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{M_n(1-M_n)}\right) &= 4\\
\lim_{n\to\infty} M_n(1-M_n) &= \frac{1}{4}\\
\lim_{n\to\infty}\left(M_n-\frac{1}{2}\right)^2 &= 0\\
\lim_{n\to\infty}\left(M_n-\frac{1}{2}\right) &= 0\\
\lim_{n\to\infty} M_n &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

이제 임의의 $\frac{1}{2}$보다 작은 고정된 양수 c에 대해서

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^c p_n(t)dt=0$$

임을 보일 것이다. 먼저 $\lim_{n\to\infty} M_n=\frac{1}{2}$이므로, 우리는 임의의 $n>N_2$인 n에 대해서 $|M_n-\frac{1}{2}|<\frac{1}{4}-\frac{1}{2}c$이게하는 N_2를 잡을 수 있다. 또한 $n>N_1$이면, non-negative and non-zero solution $y(t)$를 찾을 수 있이므로 $n>\max\{N_1,N_2\}$일 때 **Problem** 1와 같은 방법으로,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 p_n(t)dt &\geq \frac{y_n'(0)-y_n'(1)}{y_n(M_n)}\\
&\geq \frac{1}{M_n}+\frac{1}{1-M_n}\\
&\geq 4
\end{aligned}$$

임을 알 수 있으므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_n'(0)-y_n'(1)}{y(M_n)}-\left(\frac{1}{M_n}+\frac{1}{1-M_n}\right)\right)=0$$

이다. 여기서 또 다시

$$\begin{aligned}
\frac{y_n'(0)-y'(1)}{y_n(M_n)}-\left(\frac{1}{M_n}+\frac{1}{1-M_n}\right) &= \left(\frac{y_n'(0)}{y_n(M_n)}-\frac{1}{M_n}\right)\\
&\quad+\left(-\frac{y_n'(1)}{y_n(M_n)}-\frac{1}{1-M_n}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \frac{y_n'(0)}{y_n(M_n)} - \frac{1}{M_n} \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

임을 알 수 있으므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_n'(0)}{y_n(M_n)} - \frac{1}{M_n}\right) = 0$$

이다. 따라서 $\varepsilon = \frac{1-2c}{1+2c}$라고 하면, ε은 양수이므로, N_3가 존재해서 임의의 $n > N_3$인 n에 대해서

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{y_n'(0)}{y(M_n)} - \frac{1}{M_n}\right| &< \varepsilon \\
\frac{y_n'(0)}{y_n(M_n)} - \frac{1}{M_n} &< \varepsilon \quad (\because \frac{y_n'(0)}{y_n(M_n)} - \frac{1}{M_n} \geq 0) \\
\frac{y_n'(0)}{y_n(M_n)} &< \varepsilon + \frac{1}{M_n} \\
y(M) &< y'(0)\left(\varepsilon + \frac{1}{M_n}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

이게한다. 그러므로 $n > \max\{N_1, N_2, N_3\}$이면,

$$
\begin{aligned}
y_n(c) &\leq c \cdot y_n'(0) \\
y_n(M_n) &\geq \left(\frac{1}{M_n} + \varepsilon\right)^{-1} y_n'(0)
\end{aligned}
$$

이게 되어서,

$$
\begin{aligned}
\frac{y_n(c)}{y_n(M_n)} &\leq \frac{c y_n'(0)}{\left(\frac{1}{M_n} + \varepsilon\right)^{-1} y_n'(0)} \\
&= \frac{c}{M_n} + c\varepsilon \\
&\leq \frac{4c}{1+2c} + c\varepsilon \quad (\because \left|M_n - \tfrac{1}{2}\right| < \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}c \Rightarrow \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}c < M_n) \\
&\leq \frac{4c}{1+2c} + \frac{c(1-2c)}{1+2c} \\
&< \frac{4c}{1+2c} + \frac{(1-2c)}{1+2c} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

따라서 $A = 1 - (\frac{4c}{1+2c} + \frac{c(1-2c)}{1+2c})$라 하면 A는 양의 상수이고, $A \leq 1 - \frac{y(c)}{y(M_n)}$이다. 그러므로 최종적으로 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\int_0^c p_n\left(1 - \frac{y_n(t)}{y_n(M_n)}\right)dt \quad \geq \quad \int_0^c p_n\left(1 - \frac{y_n(c)}{y_n(M_n)}\right)dt$$

$$\begin{aligned}
& (\because t \in [0, M_n] \Rightarrow y'(t) \geq 0) \\
\geq & \int_0^c A p_n dt \\
= & A \int_0^c p_n dt
\end{aligned}$$

여기서 **Problem** 1과 같은 방법으로 생각하면

$$\begin{aligned}
\int_0^1 p_n(t) dt \quad & \geq \quad \int_0^1 p_n(t) \frac{y_n(t)}{y_n(M_n)} dt \\
& \geq \quad 4
\end{aligned}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 p_n(t) \left(1 - \frac{y_n(t)}{y_n(M_n)}\right) dt = 0$$

인데,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 p_n(t) \left(1 - \frac{y_n(t)}{y_n(M_n)}\right) dt \quad \geq \quad & \int_0^c p_n(t) \left(1 - \frac{y_n(t)}{y_n(M_n)}\right) dt \quad \geq \quad 0 \\
& (\because \forall (t \in [0,1])(p_n(t)(1 - \tfrac{y_n(t)}{y_n(M_n)}) > 0))
\end{aligned}$$

이어서 결국

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_0^1 p_n(t) \left(1 - \frac{y_n(t)}{y_n(M_n)}\right) dt \quad & \geq \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^c p_n(t) \left(1 - \frac{y_n(t)}{y_n(M_n)}\right) dt \\
& \geq \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^c p_n(t) \left(1 - \frac{y_n(c)}{y_n(M_n)}\right) dt \\
& \geq \quad \lim_{n\to\infty} A \int_0^c p_n(t) dt \quad \geq \quad 0
\end{aligned}$$

이므로 $\lim_{n\to\infty} \int_0^c p_n(t) dt = 0$ 이다. 또한 $p_n(t)$가 준 미분방정식에서 non-zero solution $y(t)$을 가지면, $p_n(1-t)$는 $y(1-t)$를 해로 가지므로, 우리는

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_{1-c}^1 p_n(t) dt \quad & = \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^c p_n(1-t) dt \\
& = \quad 0
\end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 그러므로 임의의 $\frac{1}{2}$보다 작은 c에 대해

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_c^{1-c} p_n(t) dt \quad & = \quad \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^c p_n(t) dt + \int_c^{1-c} p_n(t) dt + \int_{1-c}^1 p_n(t) dt \right) \\
& = \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 p_n(t) dt \\
& = \quad 4
\end{aligned}$$

이제 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0^+}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}-s} p_n(t)\varphi(t)dt &= \lim_{s\to 0^+} 0 \\
(\because \tfrac{1}{2}-s<\tfrac{1}{2} &\rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}-s} p_n(t)\varphi(t)dt = 0) \\
&= 0 \\
\lim_{s\to 0^+}\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{2}+s}^{1} p_n(t)\varphi(t)dt &= \lim_{s\to 0^+} 0 \\
(\because \tfrac{1}{2}+s>\tfrac{1}{2} &\rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{2}+s}^{1} p_n(t)\varphi(t)dt = 0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

또한 m'_s, M'_s를 각각 $[\frac{1}{2}-s,\frac{1}{2}+s]$에서의 φ의 최소값과 최대값이라 하면,

$$\varphi(m'_s)\int_{\frac{1}{2}-s}^{\frac{1}{2}+s} p_n(t)dt \le \int_{\frac{1}{2}-s}^{\frac{1}{2}+s} p_n(t)\varphi(t)dt \le \varphi(M'_s)\int_{\frac{1}{2}-s}^{\frac{1}{2}+s} p_n(t)dt$$

이므로 squeeze theorem에 의해,

$$4\varphi(m'_s) \le \lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{2}-s}^{\frac{1}{2}+s} p_n(t)\varphi(t)dt \le 4\varphi(M'_s)$$

임을 알 수 있고, φ가 $[0,1]$에서 연속이므로

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0^+}\varphi(m'_s) &= \varphi(\frac{1}{2}) \\
\lim_{s\to 0^+}\varphi(M'_s) &= \varphi(\frac{1}{2})
\end{aligned}$$

이어서 다시 한번 squeeze theorem을 사용하면,

$$\lim_{s\to 0^+}\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{2}-s}^{\frac{1}{2}+s} p_n(t)\varphi(t)dt = 4\varphi(\frac{1}{2})$$

임을 알 수 있다. 따라서 임의의 [0,1]에서 연속인 함수 $\varphi(t)$에 대해 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_0^1 p_n(t)\varphi(t)dt \\
=\ &\lim_{s\to 0^+}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 p_n(t)\varphi(t)dt \quad (\because \text{좌변은 } s\text{와 독립이기 때문}) \\
=\ &\lim_{s\to 0^+}\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\frac{1}{2}-s} p_n(t)\varphi(t)dt + \int_{\frac{1}{2}-s}^{\frac{1}{2}+s} p_n(t)\varphi(t)dt + \int_{\frac{1}{2}+s}^{1} p_n(t)\varphi(t)dt\right) \\
=\ &4\varphi(\frac{1}{2})
\end{aligned}$$