FGB-P2008-02

08학번 수학과 권혁준

2008년 2월 27일

문제를 풀기전에 고정된 자연수 N을 잡자. 이제 $P(M = 0)$이 가장 크다는 것을 증명할 것인데, 여기서 우리는 *fair coin*을 사용했으므로 $2N$번의 동전을 던졌을 때 0이 *the maximal point*가 되는 경우의 수가, 다른 수가 *the maximal point*가 되는 경우의 수보다 크다는 것을 증명하며 된다. 이제 n이 다음 조건을 만족할 때 *a bounding point*라고 하자.[1]

$$S_i < S_0 \quad \text{for} \quad 0 < i \leq n$$
$$S_i \leq S_n \quad \text{for} \quad n < i$$

그리고 M_n, B_n을 각각 n이 *the maximal point*, *a bounding point*가 될 경우의 수라고 하자. 먼저 우리는 모든 n에 대해서 M_n와 B_n가 같음을 보일 것이다. 증명을 하기전에 고정된 n을 잡고 시작하자.

먼저 동전을 던졌을 때 나올 수 있는 방볍들의 집합을 $\mathcal{H}$라고 하자. 그러면 우리는 다음과 같은 $f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$을 생각할 수 있다.

어떤 $h \in \mathcal{H}$에서 $i \leq n$인 i에 대해 $f(h)$의 $n - i + 1$번 째로 던진 동전은 h의 i번째 던진 동전과 반대면이 나오고, $n < i$인 i에 대해 $f(h)$의 i번 째로 던진 동전은 h의 i번째 던진 동전과 같은면이 나온다.[2]

그러면 $f(f(h)) = h$이기 때문에 함수 f가 전단사함수임을 알 수 있다. 또한 h, $f(h)$에서 S_i값을 각각 A_i, B_i라 하면, 우리는 $i \leq n$인 i에 대해 $A_i - B_{n-i}$가 상수이고, $i < n$인 i에 대해 $A_i - B_i$가 상수임을 알 수 있다. 따라서

$$\text{for} \quad 0 \leq i < n \quad (A_i < A_n \quad \Leftrightarrow \quad B_{n-i} < B_0)$$
$$\text{for} \quad n < i \quad (A_i \leq A_n \quad \Leftrightarrow \quad B_i \leq B_n)$$

[1] 증명에서 필요하지는 않지만 한가지 주목할만한 점은 *the maximal point*는 항상 유일하게 존재하지만, *a bounding point*는 유일성도 존재성도 결여될 수 있는 것이다.

[2] 예를들어 $N = 4$, $n = 5$일 때 h에서 'HHTHT TTH'가 나왔다면 $f(h)$에서는 'HTHTT TTH'가 나온다.

임을 알 수 있고, 그러므로 f가 *the maximal point*라는 것과 $f(h)$가 *a bounding point*라는 것은 서로 동치임을 보일 수 있다. 여기서 f가 전단사 함수이므로, 결국 $M_n = B_n$임을 알 수 있다.

이제 모든 B_i중에서 B_0이 유일하게 가장 크다는 것을 보이면 된다. 만약 0보다 큰 i가 어떤 $\mathcal{H}$의 원소 h에서 *a bounding point*라고 하면, *a bounding point*의 첫번째 조건에 의해 $S_i < S_0$이 되고, 따라서 i보다 큰 모든 j에 대해서 $S_j \leq S_i < S_0$가 된다. 결국 모든 0보다 큰 j에 대해서 $S_j < S_0$이다. 또한 $0 < i \leq 0$인 i는 존재하지 않으므로 첫번째 조건도 만족한다. 따라서 0도 *a bounding point*가 된다.

이제 동전을 던졌을 때 뒷면과 앞면이 한번씩 번갈아 가면서 나왔다고 하자.[3] 그러면 짝수인 i에 대해서 $S_i = 0$이고, 홀수인 i에 대해서 $S_i = -1$이다. 그러므로 모든 0보다 큰 i에 대해서 $S_i \leq S_0$이므로 결국 0이 *a bounding point*가 되는데, $S_2 < S_0$가 아니므로 2보다 큰 수는 *a bounding point*가 되지 못하고, $S_2 \leq S_1$가 아니므로 1도 *a bounding point*가 되지 못한다.[4]

그러므로 우리는 0이 아닌 다른 수가 *a bounding point*라면 0또한 *a bounding point*이고, 0만이 *a bounding point*가 되는 h가 존재함을 보였으므로 모든 B_i중에서 B_0이 유일하게 가장크다는 것을 알 수 있다.

결론적으로 P(M = n)을 가장크게하는 n은 0이다.

[3]THTHTHTH 와 같은 식으로 나왔다고 가정한다.
[4]2N은 짝수이므로 적어도 2이상이다.